به نام خدا

- تابع توزیع احتمال

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\}$$

- تابع چگالی احتمال

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

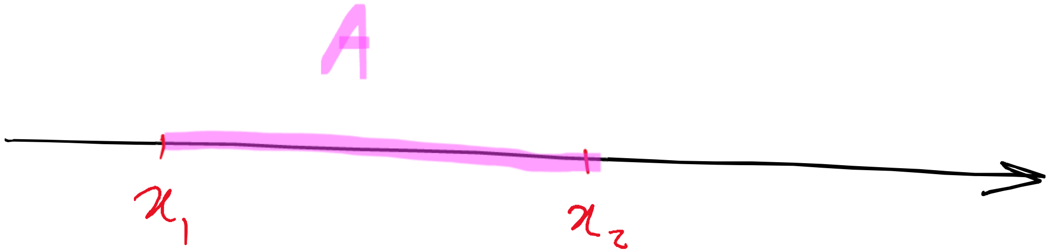
طبق خصوصیاتی که برای $f_X(x)$ بیان شد، می‌توانیم احتمال هر پیشامدی در رابطه با X را با داشتن $f_X(x)$ به دست بیاوریم.

$$P_r\{X \in A\} = \int_A f_X(\alpha)\,d\alpha$$

$$A \subseteq \mathbb{R}$$

با توجه به اینکه در حالت یک بعدی هستیم در فضای مقادیر متغیر تصادفی، فضای اعداد حقیقی
است، پیشامدهای مرتبط با X روی محور اعداد حقیقی به صورت یک بعدی
هستند.

$$A = \{x_1 \le X \le x_2\}$$



$$P_r(A) = P_r\{X \in A\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \underbrace{P_r\{X = x_1\}}_{F_X(x_1) - F_X(x_1^-)} + \overbrace{P_r\{x_1 < X \le x_2\}}^{F_X(x_2) - F_X(x_1)}$$

با داشتن $F_X(x)$

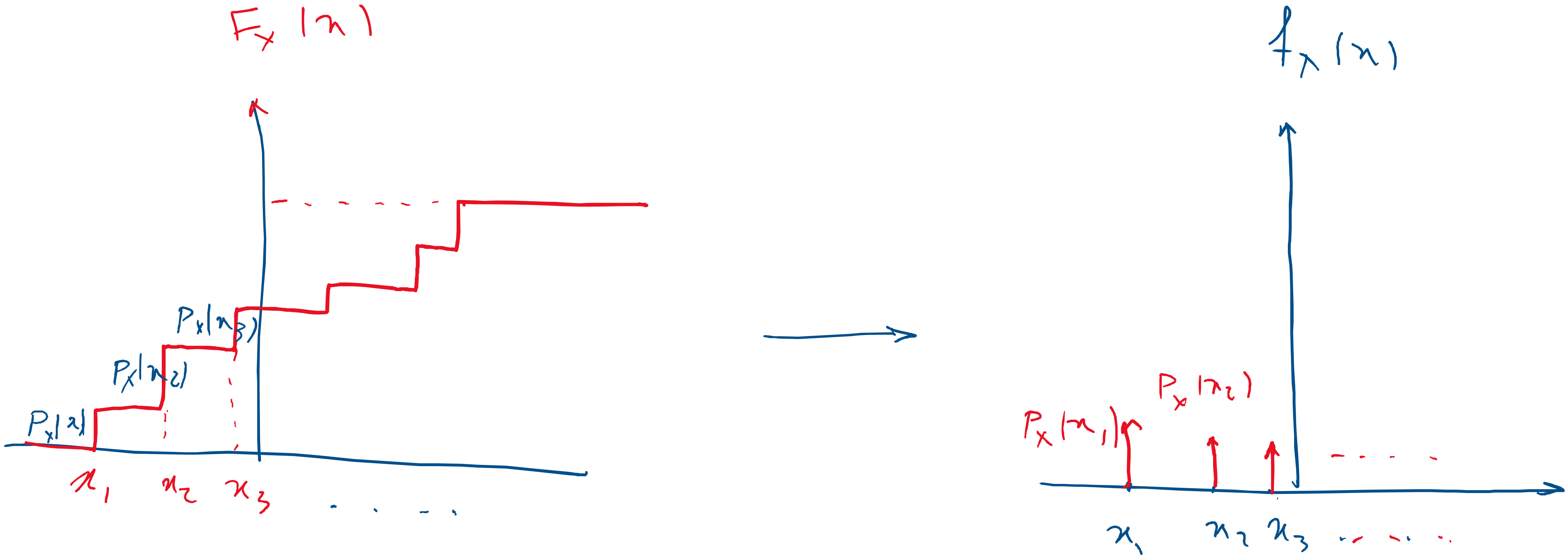
$$= F_X(x_2) - F_X(x_1^-)$$

* برای متغیرهای تصادفی گسسته، تابع چگالی احتمال با داشتن تابع pmf قابل بیان است. می دانیم

$$P_X(x) = P_r\{X = x\}$$

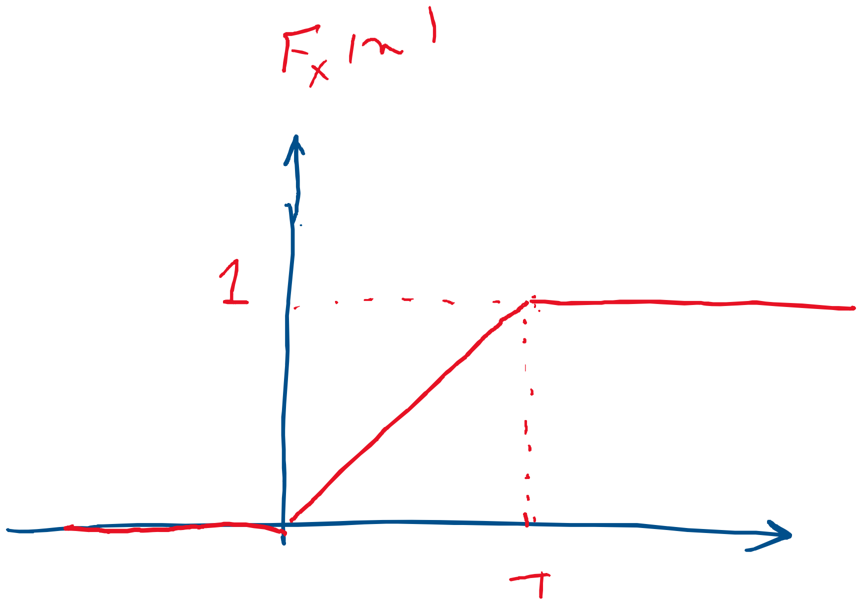
فرض کنیم که متغیر تصادفی X مقادیری از مجموعه $\{x_1, x_2, \dots\}$ را اختیار کند، می توان نوشت:

$$f_X(x) = \sum_i P_X(x_i)\,\delta(x - x_i)$$



در مورد متغیرهای تصادفی گسسته، با داشتن تابع Pmf، می‌توان توابع توزیع و چگالی احتمال را به دست آورد.

مثال - در جلسه گذشته، مثالی از یک متغیر تصادفی دیدیم که نشان دهنده زمان رخداد یک مکالمه تلفنی در بازه $[0, T]$ بود و تابع توزیع احتمال آن را به صورت زیر به دست آوردیم.



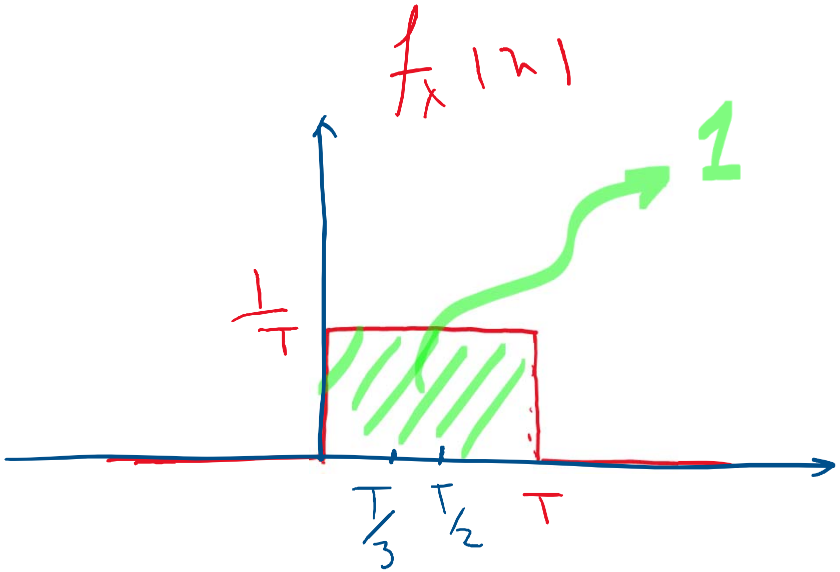
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{T} & 0 \leq x \leq T \\ 1 & x \geq T \end{cases}$$

می دانیم که

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

با توجه به $F_X(x)$ داریم:

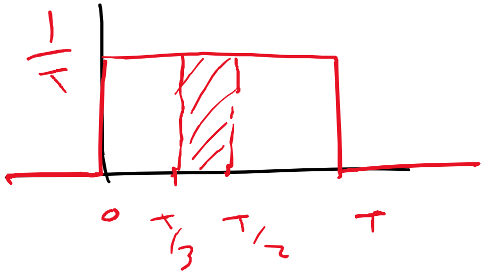
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 \le x \le T \\ 0 & oth. \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_0^T \frac{1}{T}\, d\alpha = \frac{1}{T}\, \alpha \Big|_0^T = 1$$

همان طور که می بینیم

$=$ سطح زیر منحنی $f_X(x)$



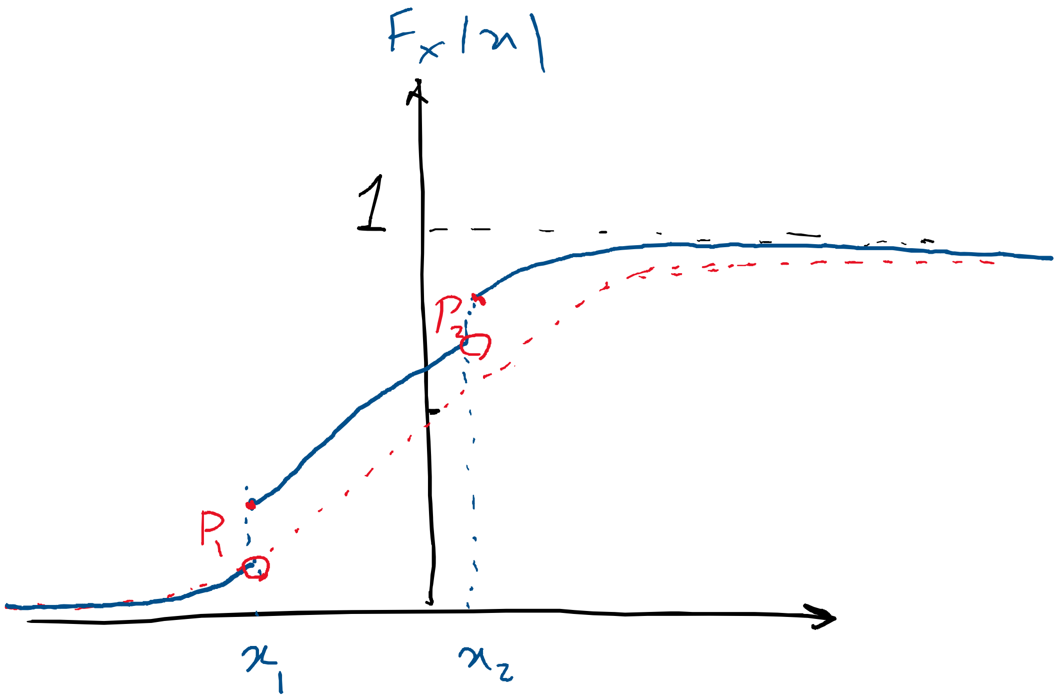
به طور مثال: $P_r\{T/3 \leq X \leq T/2\}$ را بدست بیاورید.

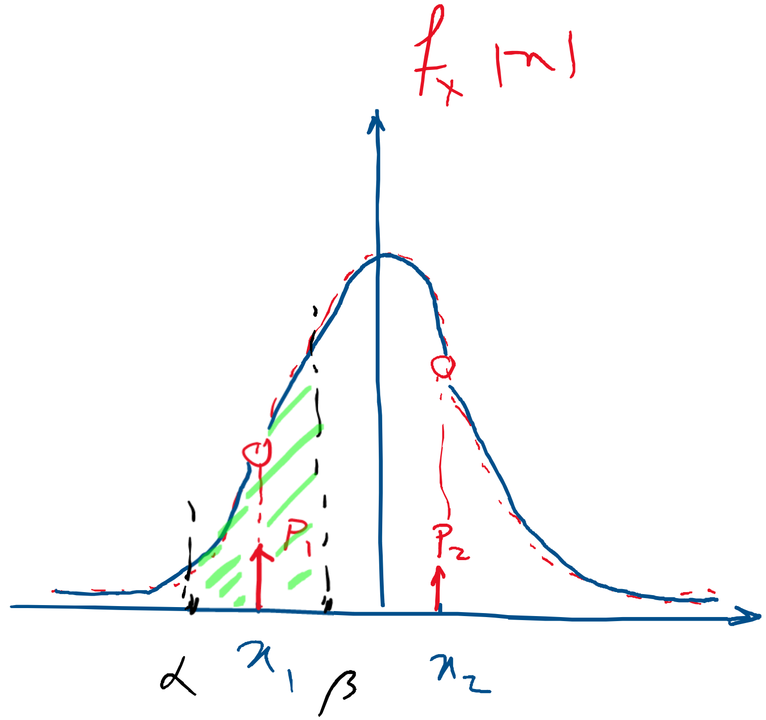
$$P_r\left\{\frac{T}{3} \leq X \leq \frac{T}{2}\right\} = \int_{T/3}^{T/2} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{T/3}^{T/2} \frac{1}{T}\, d\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad P_r\left\{\frac{T}{3} \leq X \leq \frac{T}{2}\right\} = \frac{1}{T}\, x \Big|_{T/3}^{T/2} = \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - \frac{T}{3}\right)$$

$$P_r\left\{T/3 \leq X \leq \frac{T}{2}\right\} = \frac{1}{6}$$

مثال: اگر تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد، تابع چگالی احتمال آن را به دست بیاورید.





$$P_r\{X = x_1\} = P_1$$

$$P_r\{X = x_2\} = P_2$$

$$P_r\{X = x\} = 0 \quad \forall x \neq x_1, x_2$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$P_r\{\alpha \leq X \leq \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)\,dx$$

مثال : فرض کنیم مدت زمان کارکرد یک وسیله الکتریکی قبل از خراب شدن با متغیر تصادفی X نشان داده می‌شود که تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر است، (برحسب روز)

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\frac{x}{100}} & x \geq 0 \\ 0 & oth. \end{cases}$$

در ارتباط با این متغیر تصادفی ، احتمال پیش آمدهای زیر را به دست بیاورید.

1_ اینکه این وسیله الکتریکی کمتر از 100 روز کار کند.

2_ اینکه این وسیله الکتریکی بین 50 تا 150 روز کار کند.

$$P_1 = \int_0^{100} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{100} \lambda e^{-\frac{\alpha}{100}}\, d\alpha$$

$$P_2 = \int_{50}^{150} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{50}^{150} \lambda e^{-\frac{\alpha}{100}}\, d\alpha$$

برای محاسبه P_1 و P_2 نیاز به داشتن λ داریم. برای به دست آوردن λ از خاصیت نرمالیزه بودن تابع چگالی احتمال استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha)\, d\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\frac{\alpha}{100}}\, d\alpha = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\frac{\alpha}{100}}\, d\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \lambda \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{100}}\, d\alpha = \lambda \left(-100 e^{-\frac{\alpha}{100}}\right)\Big|_{0}^{\infty} = 1$$

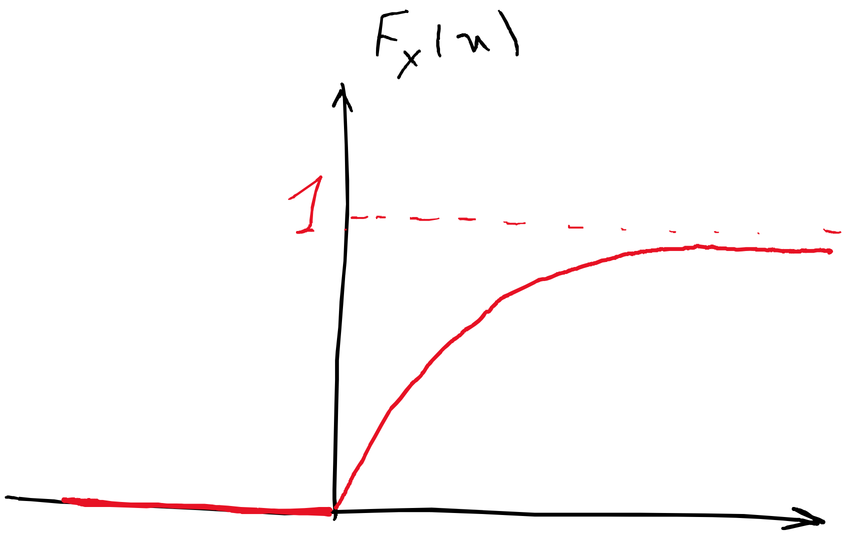
$$\Rightarrow 100\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{100}$$

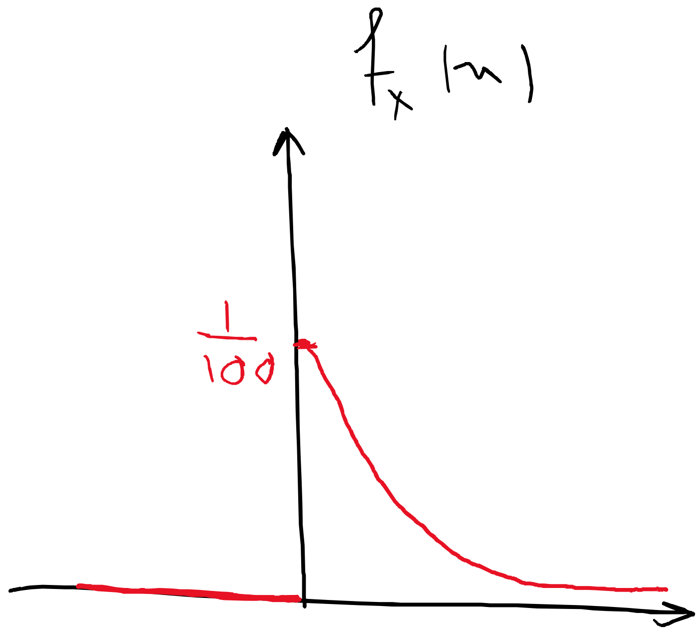
$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{100} e^{-\frac{\alpha}{100}}\, d\alpha = \int_{0}^{x}$$

$$\Rightarrow \quad F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{100} e^{-\frac{\alpha}{100}} \, d\alpha = -e^{-\frac{\alpha}{100}} \Big|_0^x$$

$$\Rightarrow \quad F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{100}} \quad , \quad x \geqslant 0$$





$$\Longrightarrow P_1 = \int_0^{100} f_X(\alpha)\,d\alpha = \int_0^{100} \frac{1}{100} e^{-\frac{\alpha}{100}}\,d\alpha$$

$$\Longrightarrow P_1 = -e^{-\frac{\alpha}{100}} \Big|_0^{100} = 1 - e^{-1} = F_X(100)$$

$$P_2 = \int_{50}^{150} f_X(\alpha)\,d\alpha = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-\frac{\alpha}{100}}\,d\alpha = -e^{-\frac{\alpha}{100}} \Big|_{50}^{150}$$

$$= e^{-1/2} - e^{-\frac{3}{2}} = F_X(150) - F_X(100)$$

* به دست آوردن تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی به صورت تجربی (هیستوگرام)

در بسیاری از کاربردها و سیستم های عملی یا شبیه سازی ها، اندازه گیری ها (یا نمونه هایی) را در ارتباط با یک متغیر تصادفی X در اختیار داریم و می خواهیم که تابع چگالی احتمال آن را به صورت تجربی به دست بیاوریم و خصوصیات آماری این متغیر تصادفی را بررسی کنیم.

برای این منظور به ترتیب زیر عمل می کنیم.

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}$$

برای Δx به اندازه کافی کوچک می‌توان نوشت

$$f_X(x) \cong \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = \frac{P_r\{x < X \leq x+\Delta x\}}{\Delta x}$$

یا

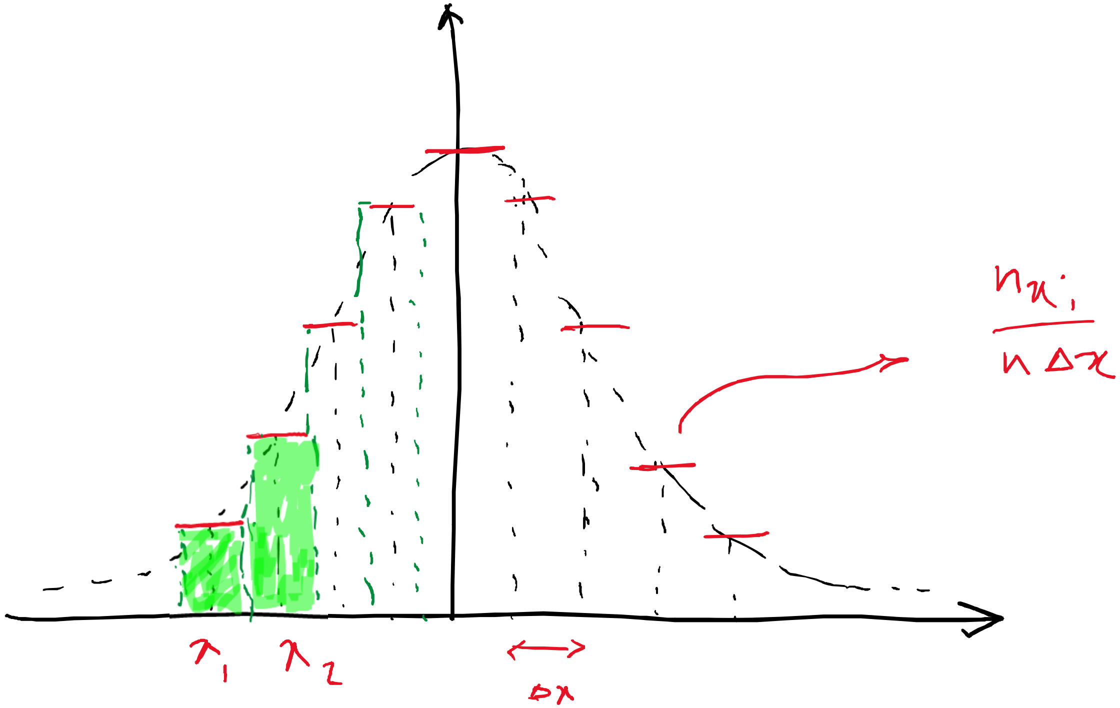
$$f_X(x)\,\Delta x \cong P_r\{x < X \leq x+\Delta x\}$$

بنابراین برای محاسبه $f_X(x)$ به صورت تجربی، Δx را به اندازه‌های کوچک در نظر می‌گیریم و احتمال پیش‌آمدهای به فرم $\{x_i < X \leq x_i + \Delta x\}$ را بر اساس نتایج آزمایش‌ها با اندازه‌گیری‌ها به دست می‌آوریم و از رابطه زیر $f_X(x)$ را به صورت تقریبی محاسبه می‌کنیم

$$f_X(x_i) \cong \frac{P_r\{x_i < X \leq x_i + \Delta x\}}{\Delta x} \cong \frac{\frac{n_{x_i}}{n}}{\Delta x} = \frac{n_{x_i}}{n \Delta x}$$

$n_{x_i} =$ تعداد حالتهایی که $\{x_i < X \leq x_i + \Delta x\}$ $\qquad$ $n =$ تعداد کل آزمایش‌ها

$f_X(x)$



* معرفی متغیرهای تصادفی پرکاربرد

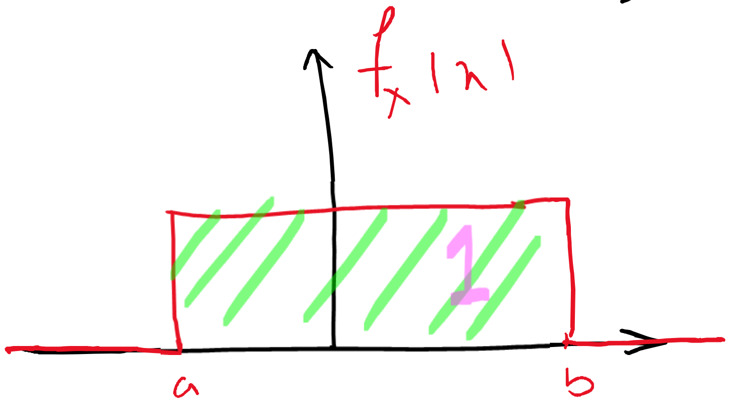
در این بخش می‌خواهیم متغیرهای تصادفی پرکاربرد و توابع احتمال آنها را معرفی کنیم.

برای این منظور متغیرهای تصادفی را در دو گروه کلی متغیرهای تصادفی پیوسته و متغیرهای تصادفی گسسته مورد بررسی قرار می‌دهیم. در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته معمولاً با تابع چگالی احتمال سر و کار داریم و در مورد متغیرهای تصادفی گسسته معمولاً با تابع pmf کار می‌کنیم.

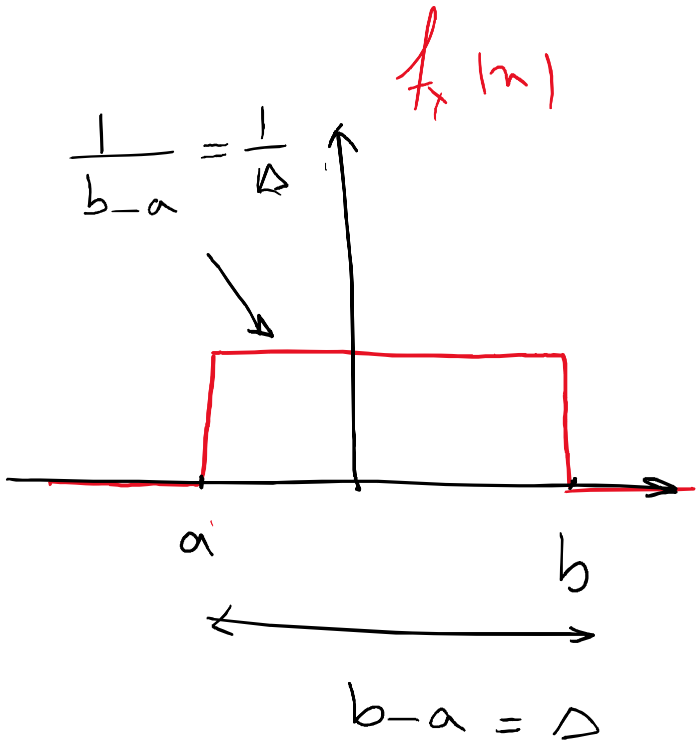
الف) متغیرهای تصادفی پیوسته پرکاربرد

۱- متغیر تصادفی یکنواخت   Uniform

متغیر تصادفی یکنواخت X ، متغیری است که مقادیری در بازه $[a, b]$ اختیار می‌کند، و تابع چگالی احتمال آن در این بازه یکنواخت (ثابت) است.



$$f_X(x) = \begin{cases} \text{Constant} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$



با توجه به نرمالیزه بودن $f_X(x)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\Delta} & a \le x \le b \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$X \sim \text{Uniform}(a, b)$$

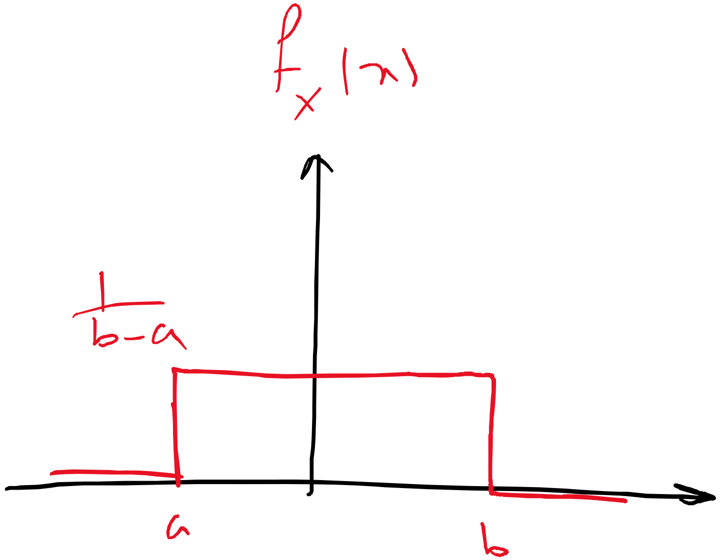
یا

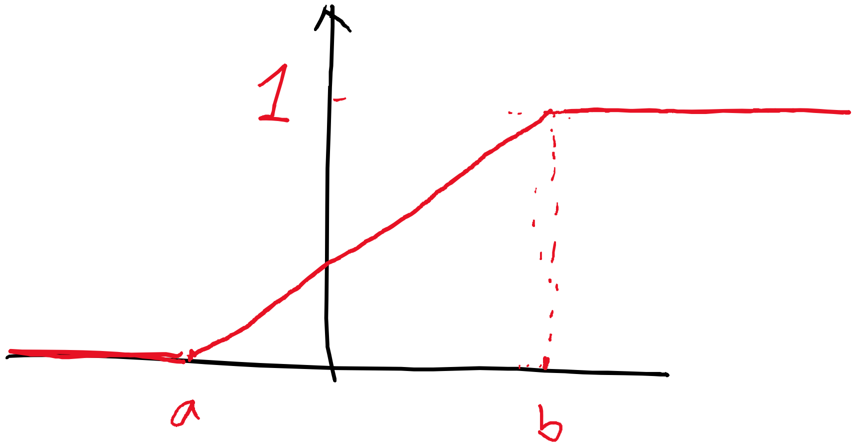
$$X \sim U(a, b)$$

تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی یکنواخت $X \sim U(a,b)$ به صورت زیر است

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha = \int_{\underbrace{-\infty}_{a}}^{x} \frac{1}{b-a}\,d\alpha = \frac{\alpha}{b-a}\Big|_{a}^{x}$$

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-a}{\Delta}$$





* متغیر تصادفی یکنواخت در حالت گسسته نیز قابل تعریف است که در بخش متغیرهای تصادفی گسسته به آن می‌پردازیم.

2 - متغیر تصادفی نرمال یا گاوسی

Normal / Gaussian

متغیر تصادفی گاوسی یا نرمال یکی از پرکاربردترین متغیرهای تصادفی در بحث‌های مهندسی است زیرا بسیاری از پدیده‌های فیزیکی را که با آنها سروکار داریم، می‌توانیم به صورت یک متغیر تصادفی گاوسی مدل سازی کنیم.

علاوه بر این، متغیر تصادفی گاوسی، ویژگی‌های خاصی دارد که کاربردهای فراوانی

برای آن ایجاد می‌کند. به طور مثال براساس قضیه حد مرکزی، حاصل‌جمع تعداد

زیادی متغیر تصادفی مستقل، به صورت یک متغیر تصادفی نرمال قابل مدل سازی است.

بنابراین بسیاری از نویزها و تداخل‌ها را در سیستم‌های الکترونیکی می‌توانیم به صورت یک

متغیر تصادفی گاوسی مدل سازی کنیم. به عنوان مثالی دیگر، خاصیت پایداری برای

متغیر تصادفی گاوسی برقرار است و حاصل‌جمع چند متغیر تصادفی گاوسی مستقل، یک متغیر گاوسی است.

متغیر تصادفی گوسی (نرمال) X با دو پارامتر m , σ^2 مشخص می‌شود.

$$X \sim N(m, \sigma^2)$$

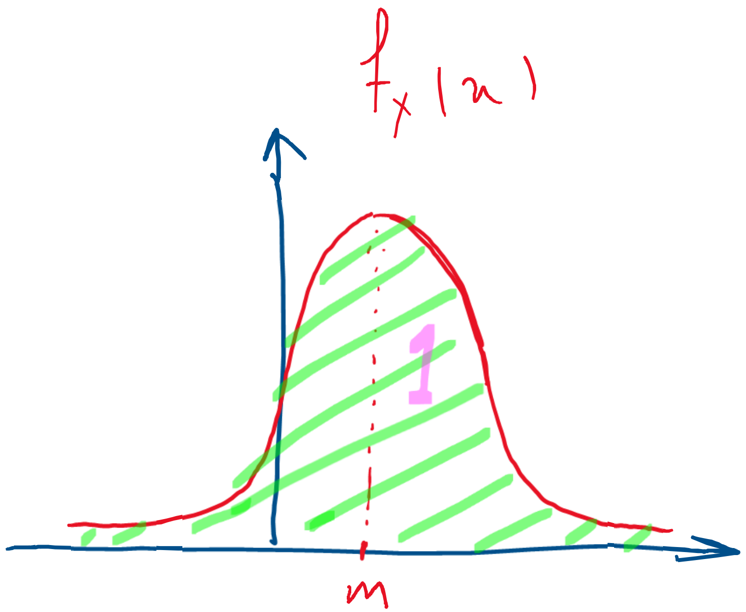
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

پارامتر m ، میانگین متغیر تصادفی X است.

پارامتر σ^2 ، واریانس متغیر تصادفی X است.

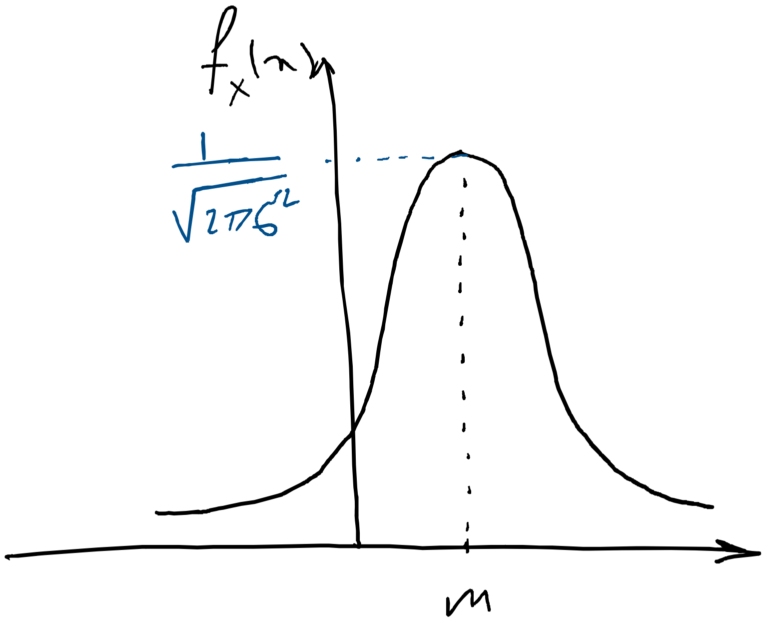
به جذر واریانس (σ) انحراف از معیار متغیر تصادفی X گفته می‌شود.

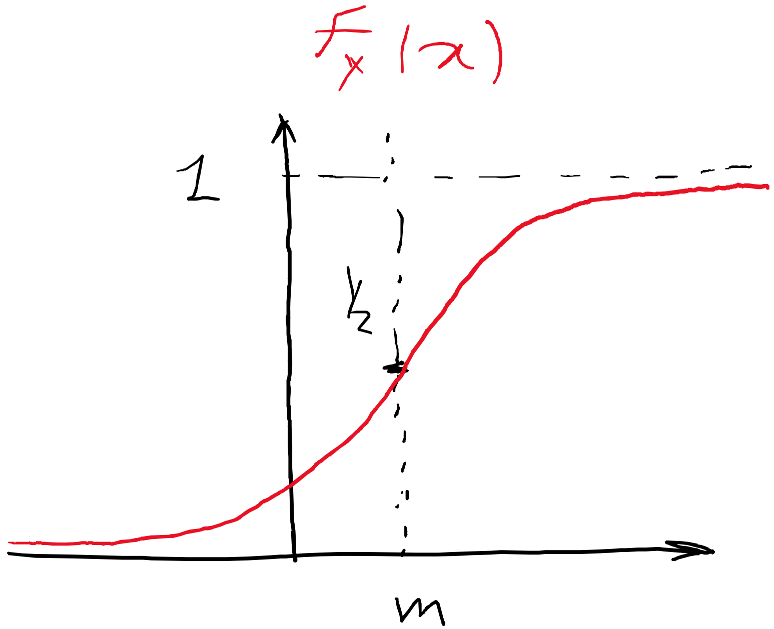


$f_X(x)$ حول $x = m$ دارای

تقارن زوج است.

$x \in (-\infty, +\infty)$



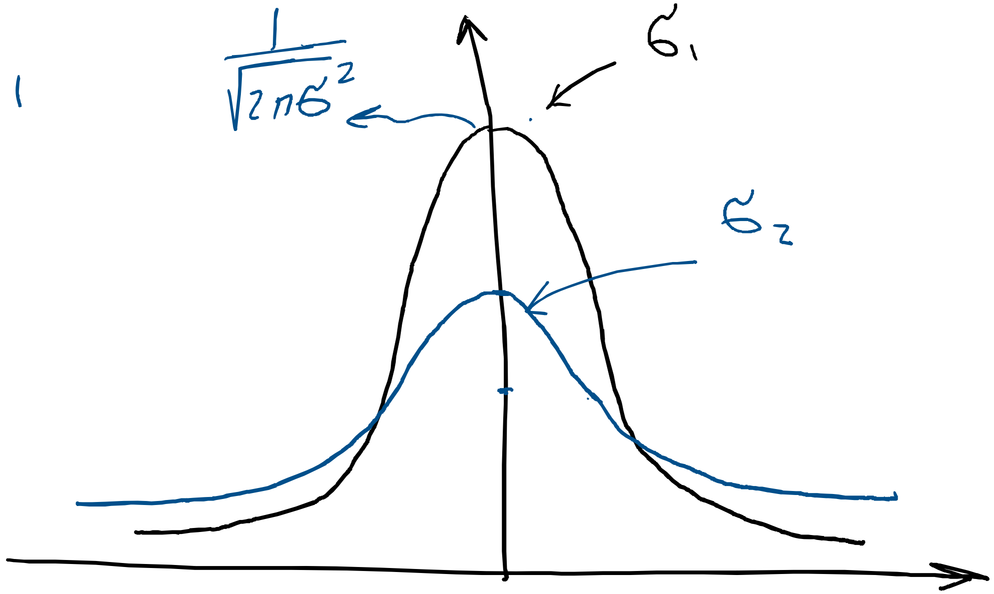


$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

σ : انحراف از معیار نشان دهنده میزان انحراف X از مقدار میانگین خودش است.

$\sigma_2 > \sigma_1$



هرچه انحراف از معیار بیشتر باشد، منحنی $f_X(x)$ حول میانگین پهن‌تر گسترده خواهد شد.

در مورد متغیرهای تصادفی گوسی، احتمال چند پیش آمد به صورت زیر اهمیت ویژه دارند

$$P_r\{m-\sigma \leq X \leq m+\sigma\} = 0.683$$

$$P_r\{m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma\} = 0.954 = \int_{m-2\sigma}^{m+2\sigma} f_X(\alpha)\,d\alpha$$

$$P_r\{m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma\} = 0.997$$

$$\int_{m-\sigma}^{m+\sigma} f_x(\alpha)\, d\alpha$$